

基于强“奖优罚劣”算子的多指标灰靶决策模型

宋 捷, 党耀国, 王正新

(南京航空航天大学经济与管理学院, 江苏 南京 210016)

摘 要: 对多指标灰靶决策模型进行了研究。提出了对三种类型指标进行标准化处理的强“奖优罚劣”算子, 相较于原有的线性的“奖优罚劣”算子, 这种非线性算子进一步加大标准化后同指标各方案的数据的区分度, 从而提高决策质量。以各方案靶心距平方和最小为目标建立了优化模型, 并使用拉格朗日函数求解来得到各指标权重, 并以此为基础构建了灰靶决策模型。最后, 以实例说明了基于强“奖优罚劣”算子灰靶决策模型的合理性及算法的有效性。

关键词: 多属性决策; 灰靶; 算子; 拉格朗日函数

中图分类号: N 94

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2010.06.026

Multi-attribute decision model of grey target based on majorant operator of “rewarding good and punishing bad”

SONG Jie, DANG Yao-guo, WANG Zheng-xin

(Coll. of Economics & Management, Nanjing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The multi-attribute decision model of grey targets is studied, a new model of grey target decision-making is proposed. First the majorant operator of “rewarding good and punishing bad” is presented, this operator is nonlinear and can increase the difference between the data of the same index and different decision schemes. Then a single-object optimal model is established, which is solved by making the square sum of the off-target distance minimum, and the weight of each index is confirmed by constructing the Lagrangian function. Finally, the feasibility and effectiveness of the method are proved through an example.

Keywords: multi-attribute decision; grey target; operator; Lagrangian function

0 引 言

灰色系统理论创始人邓聚龙提出了灰靶思想, 即在一组模式序列中, 找出最靠近目标值的数据构建标准模式, 各模式与标准模式构成灰靶, 标准模式为靶心^[1-4]。随后众多学者对灰靶理论展开了研究。文献[3]基于欧氏距离定义了靶心距, 并构建了 s 维球形灰靶。文献[5]对邓氏灰靶的不相容问题进行了研究, 通过程序统计模拟对邓氏灰靶不相容问题出现的频率进行了计算, 认为邓氏灰靶需要改进。文献[6]构建了对不同属性指标进行初始化处理的一种新的算子, 并在此基础上建立了加权灰靶决策模型。文献[7]研究了指标值为区间数的多指标灰靶决策模型, 定义了区间数的距离, 证明区间数距离时实数距离的推广, 提出了区间数规范化方法并由此构建了基于区间数的灰靶决策模型。文献[8]将灰靶理论引入企业财务研究中, 并使用 Altman 模型对企业财务状况进行评价。文献[9]提出了高科

技企业核心刚性影响因素指标体系, 使用灰靶方法对调研数据进行研究得到了较好的结果。文献[10]使用灰靶方法对 AK74、AK47 和 M98K 三种步枪进行效能评价, 通过对步枪战技性能指标数据计算得到了其突击指数排序。

由于决策中的指标集中各指标具有不同的量纲, 在决策中为了将各种指标进行直接比较需要将原始效果样本矩阵进行初始化处理。常用的初始化方法较多, 如均值化变换、始点零化象变换、初值化变换、区间值化变换等^[3]。决策中的指标经常具有“积极性”“负极性”“中性性”(或效益型、成本型和区间型)三种不同属性, 这就需要专门的变换算子对其处理。文献[2]提出了一套对三种属性指标处理的算子。文献[7]提出当指标值为区间数时对多属性指标进行处理的算子。文献[6]提出了对多属性指标进行处理的“奖优罚劣”算子, 即当评价对象指标值优于平均水平时, 赋 0 到 1 的正值; 劣于平均值时, 赋 -1 到 0 的负值。其实质是使用一种新的线性变换算子, 文献[2]中算子计算结果

收稿日期: 2009-01-23; 修回日期: 2009-06-11。

基金项目: 国家自然科学基金(70473037); 南京航空航天大学博士学位论文创新与创优基金(BCXJ09-08)资助课题

作者简介: 宋捷(1982-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为管理科学与工程。E-mail: claudesong@gmail.com

取值为正,而“奖优罚劣”算子扩展到负值,可以扩大指标的差异度以更有有效的决策。

1 多指标灰靶决策优化模型的建立

设多指标决策问题有 n 个决策方案,组成决策方案集 $S, S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$; m 个评价指标组成指标集 $A, A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$; 方案 S_i 对指标 A_j 的效果样本值为 $x_{ij} (i = 1, 2, \dots, n) (j = 1, 2, \dots, m)$ 。则方案集 S 对指标集 A 的效果样本矩阵为

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

指标集 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 一般情况下可以分为三种类型:正极性、负极性和中极性。正极性指标指值越大越优的指标;负极性指标指值越小越优的指标;中极性指标指取某一固定值为最优的指标。

令 $A = \bigcup_{k=1}^3 \Omega_k$, 且 $\Omega_{k_1} \cap \Omega_{k_2} = \phi, k_1, k_2 = 1, 2, 3, k_1 \neq k_2$ 。式中, Ω_1 为正极性指标集; Ω_2 为负极性指标集; Ω_3 为中极性指标集。

1.1 强“奖优罚劣”变换算子

由于各指标具有不同的量纲,我们需要对指标进行初始变换。文献[6]提出了“奖优罚劣”算子,可以将指标差异度加大,同时提出了“奖优罚劣”变换是一种线性变换。可以使用非线性函数构造一种强“奖优罚劣”变换,可以将指标差异度进一步加大。对正极性、负极性与中极性指标的强“奖优罚劣”变换函数如图 1~图 3 所示。

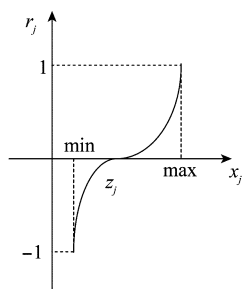


图 1 正极性指标的强“奖优罚劣”算子

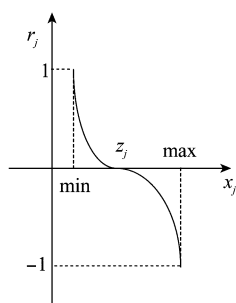


图 2 负极性指标的强“奖优罚劣”算子

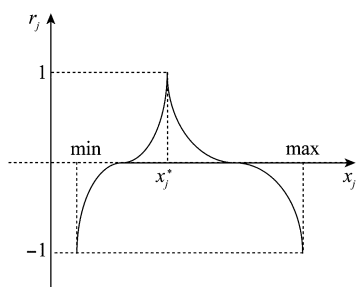


图 3 中极性指标的强“奖优罚劣”算子

$$\text{令 } z_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} (j = 1, 2, \dots, m), x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}),$$

x_j^* 为中性指标的适中值。

若 a_j 为正极性指标,则

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{(x_{ij} - z_j)^3}{(\max_{i=1,2,\dots,n} x_{ij} - z_j)^3}, & x_{ij} \geq z_j \\ -\frac{(x_{ij} - z_j)^3}{(\min_{i=1,2,\dots,n} x_{ij} - z_j)^3}, & x_{ij} < z_j \end{cases}, j = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

若 a_j 为负极性指标,则

$$r_{ij} = \begin{cases} -\frac{(x_{ij} - z_j)^3}{(\max_{i=1,2,\dots,n} x_{ij} - z_j)^3}, & x_{ij} \geq z_j \\ \frac{(x_{ij} - z_j)^3}{(\min_{i=1,2,\dots,n} x_{ij} - z_j)^3}, & x_{ij} < z_j \end{cases}, j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

若 a_j 为中性指标,则

$$r_{ij} = \begin{cases} -\frac{(2x_{ij} - x_j^* - \max_{i=1,2,\dots,n} x_{ij})^3}{(\max_{i=1,2,\dots,n} x_{ij} - x_j^*)^3}, & x_{ij} \geq z_j \\ \frac{(2x_{ij} - x_j^* - \min_{i=1,2,\dots,n} x_{ij})^3}{(x_j^* - \min_{i=1,2,\dots,n} x_{ij})^3}, & x_{ij} < z_j \end{cases}, j = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

称以上变换为强“奖优罚劣”变换。

使用以上变换对效果样本矩阵 X 进行处理,可以得到决策矩阵 R 。

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T$$

式中, $r_i = [r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}] (i = 1, 2, \dots, n)$ 为方案 i 的效果向量。

则矩阵 R 中任意元素 $r_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ 是无量纲的,且为正极性元素(即元素值越大,对决策者效用越大),并且 $r_{ij} \in [-1, 1]$ 。

若指标 $a_1 \in \Omega_1$, 且 $a_1 = [1, 2, \dots, 10]$, z_1 为指标 a_1 下样本数据平均值,且 $z_1 = 4$, 则如表 1 所示。若指标 $a_2 \in \Omega_2$, 且 $a_2 = [1, 2, \dots, 10]$, z_2 为指标 a_2 下样本数据平均值,且 $z_2 = 4$, 则如表 2 所示。若指标 $a_3 \in \Omega_3$, 且 $a_3 = [1, 2, \dots, 10]$, x_3^* 为指标 a_3 下的适中值,且 $x_3^* = 4$, 则如表 3 所示。

可以看出,在传统标准化算子的基础上线性“奖优罚劣”算子将赋值范围由 $[0, 1]$ 间扩展为 $[-1, 1]$, 通过对优于平均水平的对象赋予正值劣于平均水平的对象赋予负值,拉开指标间差距,体现“奖优罚劣”;而强“奖优罚劣”算子则在传统“奖优罚劣”算子赋值范围扩展到负值基础上,通过使用非线性变换将平均值水平附近的“平庸”指标赋值的绝对值减小,这样将各指标赋值范围进一步扩大,以更利于决策者进行决策分析。

表 1 正极性指标“奖优罚劣”算子处理数据表

指标 a_1 下的样本值	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
线性“奖优罚劣”算子 ^[6]	-0.5	-0.333	-0.167	0	0.167	0.333	0.5	0.667	0.833	1
非线性“奖优罚劣”算子	-1	-0.296	-0.037	0	0.005	0.037	0.125	0.296	0.579	1

表 2 负极性指标“奖优罚劣”算子处理数据表

指标 a_2 下的样本值	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
线性“奖优罚劣”算子 ^[6]	0.5	0.333	0.167	0	-0.167	-0.333	-0.5	-0.667	-0.833	-1
非线性“奖优罚劣”算子	1	0.296	0.037	0	-0.005	-0.037	-0.125	-0.296	-0.579	-1

表 3 中性性指标“奖优罚劣”算子处理数据表

指标 a_3 下的样本值	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
线性“奖优罚劣”算子 ^[6]	-1	-0.333	0.333	1	0.667	0.333	0	-0.333	-0.667	-1
非线性“奖优罚劣”算子	-1	-0.037	0.037	1	0.296	0.037	0	-0.037	-0.296	-1

1.2 多指标灰靶决策模型

定义 1 设

$$r_j^0 = \max_{i=1,2,\cdots,n} \{r_{ij} \mid 1 \leq i \leq n\} (j = 1, 2, \cdots, m)$$
 (4)

由强“奖优罚劣”算子定义可以知道,

$$r_j^0 = \max_{i=1,2,\cdots,n} \{r_{ij} \mid 1 \leq i \leq n\} = 1$$

取 $r^0 = (r_1^0, r_2^0, \cdots, r_m^0) = (1, 1, \cdots, 1)$ 为多指标灰靶决策的最优效果向量,也称靶心。

设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$, 且 $\sum_{j=1}^m \omega_j^2 = 1$ 。

构造优化模型

$$\begin{aligned} \min H(\omega) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (r_{ij} - 1)^2 \omega_j \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^m \omega_j^2 = 1 \\ 0 \leq \omega_j \leq 1, j = 1, 2, \cdots, m \end{cases} \end{aligned}$$
 (5)

使用拉格朗日函数对式(5)进行求解,取

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (r_{ij} - 1)^2 \omega_j + \lambda \left(1 - \sum_{j=1}^m \omega_j^2 \right)$$

由 $\frac{\partial L(\omega)}{\partial \lambda} = 0; \frac{\partial L(\omega)}{\partial \omega_j} = 0$

$$\begin{aligned} \text{设 } \Gamma_j &= \sum_{i=1}^n (r_{ij} - 1)^2, \text{ 则 } \omega_j = \frac{\Gamma_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \Gamma_j^2}} \text{ 取} \\ \omega_j &= \frac{\omega_j}{\sum_{j=1}^m \omega_j} (j = 1, 2, \cdots, m) \end{aligned}$$
 (6)

可以得到指标权重 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$ 。

定义 2 称

$$R^{(m)} = \{ (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im}) \mid \omega_1 (r_{i1} - 1)^2 + \omega_2 (r_{i2} - 1)^2 + \cdots + \omega_m (r_{im} - 1)^2 = R^2 \}$$

为以 $r^0 = (r_1^0, r_2^0, \cdots, r_m^0) = (1, 1, \cdots, 1)$ 为靶心的 m 维椭球灰靶。

定义 3 设 $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im}) \in \mathbf{R}^{(m)}$, 称

$$\epsilon_i = |r_i - r^0| =$$

$$\sqrt{\omega_1 (r_{i1} - 1)^2 + \omega_2 (r_{i2} - 1)^2 + \cdots + \omega_m (r_{im} - 1)^2}$$
 (7)

为效果向量 r_i 的靶心距。

靶心距 ϵ_i 的大小反映了决策方案 s_i 的优劣, ϵ_i 值越小则决策方案 s_i 越优。

1.3 多指标灰靶决策算法

综上所述,可以得到多指标灰靶决策的算法如下:

(1) 根据多指标决策问题构造效果样本矩阵

$$\mathbf{X} = (x_{ij})_{m \times n};$$

(2) 使用指标效用变换的式(1)~式(3)把效果样本矩阵 $\mathbf{X}$ 化为决策矩阵 $\mathbf{R} = (r_{ij})_{m \times n}$;

(3) 最优效果向量 $r^0 = (r_1^0, r_2^0, \cdots, r_m^0) = (1, 1, \cdots, 1)$, 由式(6)求得指标权重 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$;

(4) 使用式(7)求效果向量 r_i 的靶心距 $\epsilon_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 若 $\min \epsilon_i = \epsilon_{i^*}$, 则方案 s_{i^*} 即为最优决策方案。将 ϵ_i 按由小到大顺序排列,即可以得到各方案的最优排序;

(5) 结束。

2 应用实例

为开发新产品,拟定了五个投资方案 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 , 各方案的效果样本值如表 4 所示。

表 4 各方案的效果样本值 万元

方案	投资额	期望净现值	风险盈利值	风险损失值
s_1	5.2	5.2	4.73	0.473
s_2	10.08	6.7	5.71	1.599
s_3	5.25	4.2	3.82	0.473
s_4	9.72	5.25	5.54	1.313
s_5	6.6	3.75	3.3	0.803

在指标中,期望净现值、风险盈利值为正极性指标,投资额、风险损失值为负极性指标。

由本文方法求投资方案排序,具体步骤如下:

(1) 由表 4 中数据建立效果样本矩阵

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5.2 & 5.2 & 4.73 & 0.473 \\ 10.08 & 6.7 & 5.71 & 1.599 \\ 5.25 & 4.2 & 3.82 & 0.473 \\ 9.72 & 5.25 & 5.54 & 1.313 \\ 6.6 & 3.75 & 3.3 & 0.803 \end{bmatrix}$$

(2) 由式(1)、式(2)对样本效果矩阵进行处理,可以得到决策矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.001\ 2 & 0.001\ 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0.932\ 5 & -0.269\ 2 & -0.222\ 6 & 1 \\ -0.652\ 1 & 0.002\ 6 & 0.601\ 3 & -0.186\ 3 \\ 0.044\ 7 & -1 & -1 & 0.022\ 3 \end{bmatrix}$$

(3) 最优效果向量 $r^0 = (1, 1, 1, 1)$, 构建优化模型并使用拉格朗日函数求解, 由式(6)可以得到指标权重为 $w_1 = 0.271, w_2 = 0.269, w_3 = 0.235, w_4 = 0.225$;

(4) 计算各方案靶心距 s_i 可以得到: $\epsilon_1 = 0.709, \epsilon_2 = 1.408, \epsilon_3 = 0.887, \epsilon_4 = 1.166, \epsilon_5 = 1.575$ 。

(5) 由 ϵ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 值由小到大排列, 即可以得到对方案 s_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 的排序为 $s_1 > s_3 > s_4 > s_2 > s_5$ 。

3 结束语

文献[6]提出了对指标进行规范化处理“奖优罚劣”算子, 这种算子通过对劣于平均水平对象赋予负值以体现“奖优罚劣”加大各对象区分度。对本文在其基础上构造了一种强“奖优罚劣”算子, 通过非线性函数的性质进一步加大指标的区分度以利于决策。这种强“奖优罚劣”算子也可以用在其他决策领域中。

参考文献:

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002.

[2] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002.

[3] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[4] Sifeng Liu, Yi Lin. *Grey information: Theory and practical applications*[M]. London: Springer, 2006.

[5] 陈勇明, 谢海英. 邓氏灰靶变换的不相容问题的统计模拟检验[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(8): 1285 - 1287. (Chen Yongming, Xie Haiying. Test of the inconsistency problem on Deng's grey transformation by simulation[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2007, 29(8): 1285 - 1287.)

[6] 党耀国, 刘国锋, 王建平, 等. 多指标加权灰靶的决策模型[J]. 统计与决策, 2004, 20(3): 29 - 30.

[7] 党耀国, 刘思峰, 刘斌. 基于区间数的多指标灰靶决策模型的研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(8): 31 - 35.

[8] Feng Jianyou, Zhang Hua. Grey target model appraising firm's financial status based on altman coefficients[J]. *The Journal of Grey System*, 2002, 53: 274 - 276.

[9] 聂鸣, 张利斌, 卢玉廷. 灰靶理论在高科技企业核心刚性识别中的应用[J]. 统计研究, 2005, (6): 62 - 65.

[10] 解志坚, 薄玉成, 王惠源, 等. 一种武器系统效能评定的新方法[J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(11): 1029 - 1034.

[11] 罗党, 周玲, 罗迪新. 灰色风险型多属性群决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(9): 1674 - 1678. (Luo Dang, Zhou Ling, Luo Dixin. Grey multi-attribute risk group decision-making method[J]. *System Engineering and Electronics*, 2008, 30(9): 1674 - 1678.)